

# LÓGICA

## HOJA 2

### Sintaxis de la lógica proposicional

**Ejercicio 1** Demuestra por inducción sobre  $\mathbb{N}$  las siguientes afirmaciones:

- Sea  $A$  un conjunto finito con  $\text{card}(A) = n$ . Entonces  $\text{card}(P(A)) = 2^n$ , donde  $P(A)$  es el conjunto de las partes de  $A$ .
- Para todo número natural  $n$ ,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Ejercicio 2** Determina cuáles de las siguientes frases son proposiciones:

- ¿Puedes ir a la cafetería?
- Por favor, sea educado.
- El jardín es muy grande.
- ¡La organización del evento es un desastre!
- ¡Échame una mano!

**Ejercicio 3** Identifica cuáles de las siguientes palabras no son fórmulas proposicionales o fórmulas proposicionales abreviadas:

- $(p \rightarrow q) \wedge r) \vee (s \wedge t)$ ,
- $(\neg(\neg(\neg(p \wedge (q \rightarrow \neg r))))))$ ,
- $\neg p$ ,
- $p \neg \wedge q$ ,
- $\neg p \vee q \vee s$ .

**Ejercicio 4** Escribe en forma abreviada las siguientes fórmulas proposicionales:

- $((p \rightarrow q) \wedge r) \vee (s \wedge t)$ ,
- $((p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (((s \rightarrow t) \wedge r) \rightarrow q))$ ,
- $((\neg(p \wedge q) \leftrightarrow r) \vee s)$ ,
- $(\neg((\neg p \rightarrow q) \vee r))$ ,
- $(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$ .

**Ejercicio 5** Escribe en forma no abreviada las siguientes fórmulas proposicionales:

- a)  $\neg r \rightarrow q \vee t \vee s$ ,
- b)  $p \wedge q \wedge r \rightarrow s \rightarrow t$ ,
- c)  $(p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow s) \rightarrow p$ ,
- d)  $\neg(\neg p \rightarrow q \vee r)$ ,
- e)  $p \wedge (q \vee r) \rightarrow s \vee t$ .

**Ejercicio 6** Representa en forma de árbol estructural las siguientes fórmulas:

- a)  $((p \vee q) \rightarrow r)$ ,
- b)  $((p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q)))$ ,
- c)  $(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$ ,
- d)  $((\neg(\neg(\neg p \vee r) \vee q)) \rightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r))$ ,
- e)  $((p \vee r) \rightarrow (p \vee \neg(r))) \leftrightarrow (r \rightarrow p)$ ,
- f)  $(p \rightarrow (s \rightarrow p))$ .

**Ejercicio 7** La **profundidad** de una fórmula proposicional  $\varphi$  es la longitud máxima de los caminos simples con vértice inicial la raíz del árbol sintáctico de  $\varphi$ .

Usando el principio de recursión estructural, define recursivamente la función  $fp$  que asigna a cada fórmula  $\varphi$  su profundidad.

**Sugerencia:** usa la función que calcula el máximo entre dos números enteros.

**Ejercicio 8 (HLR)** a) Usando el principio de recursión estructural, define recursivamente la función  $fn$  que asocia a cada fórmula  $\varphi$  el número (entero no negativo) de conectivos, sin contar los conectivos de aridad 0, que aparecen en la estructura sintáctica de  $\varphi$ .

b) Demuestra por inducción estructural que para toda fórmula  $\varphi$  se verifica que

$$fp(\varphi) \leq fn(\varphi),$$

donde la función  $fp$  es la función profundidad del ejercicio anterior.

En los siguientes ejercicios se pide formalizar los razonamientos dados. En cada caso, determinar las condiciones necesarias y las condiciones suficientes del razonamiento y volver a traducir al lenguaje natural la formalización obtenida:

**Ejercicio 9** *Voy al bar siempre que me apetezca y tenga tiempo libre.*

**Ejercicio 10** *No voy a correr a menos que tu vengas conmigo.*

**Ejercicio 11** *Estoy satisfecho sólo si no olvido las cosas importantes.*

**Ejercicio 12** *Los alumnos estudian mucho y están alegres. Si los alumnos están alegres, entonces sacan buenas notas. Por tanto, los alumnos estudian mucho sólo si están alegres.*

**Ejercicio 13** *Luis y Juan son hermanos o Beatriz y Luis son primos. Si Juan y Beatriz son primos, entonces Luis y Juan son hermanos. Por tanto, Beatriz y Luis son primos.*

**Ejercicio 14 (C)** *Si llueve las calles estarán vacías. Si las calles están vacías, el comercio obtiene pérdidas. Los músicos no podrían sobrevivir si los comerciantes no les contratasen para componer canciones para publicidad. Los comerciantes invierten en canciones publicitarias cuando tienen pérdidas. Por tanto, si llueve, los músicos pueden sobrevivir.*